

Для определения зольности угля в месторождении в порядке случайной выборки было обследовано 100 проб угля.. В результате обследования установлено, что средняя зольность угля в выборке 16%, среднее квадратическое отклонение 5%. В десяти пробах зольность составила более 20%. С вероятностью 0,954 определить пределы, в которых будут находиться средняя зольность угля в месторождении и доля угля с зольностью более 20%.

Решение:

По условию задачи: $\bar{x}_B = 16$ - средняя зольность угля в выборке, $\sigma_B = 5$ - среднее квадратическое отклонение, $n = 100$ - число данных в выборке.

Средняя зольность угля в месторождении будет заключена в следующих границах:

$\bar{x}_B - \Delta \leq \bar{x}_0 \leq \bar{x}_B + \Delta$, где $\Delta = t \cdot \sigma'_x$ - предельная ошибка выборки.

Так как по условию доверительная вероятность $P = 0,954$, то значение t найдем по таблице значений функции Лапласа из условия $\Phi(t) = \frac{P}{2} = \frac{0,954}{2} = 0,477$. По таблице

находим $t = 2$.

Так как по условию выборка бесповторная и оценивается генеральная средняя, то среднюю квадратическую ошибку σ'_x найдем по следующей формуле:

$$\sigma'_x \approx \sqrt{\frac{\sigma_B^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \left[\begin{array}{c} \text{по условию задачи} \\ N \rightarrow \infty \end{array} \right] \approx \sqrt{\frac{\sigma_B^2}{n}} \approx \sqrt{\frac{5^2}{100}} = 0,5.$$

Тогда $\Delta = t \cdot \sigma'_x = 2 \cdot 0,5 = 1$.

Искомые пределы:

$$\bar{x}_B - \Delta \leq \bar{x}_0 \leq \bar{x}_B + \Delta,$$

$$16 - 1 \leq \bar{x}_0 \leq 16 + 1,$$

$15 \leq \bar{x}_0 \leq 17$, т.е. с вероятностью 0,954 можно утверждать, что средняя зольность угля в месторождении изменяется от 15% до 17%.

Найдем выборочную долю угля с зольностью более 20%: $w = \frac{10}{100} = 0,1$.

Доля угля с зольностью более 20% будет заключена в следующих границах:

$$w - \delta \leq p \leq w + \delta, \text{ где } \delta = t \cdot \sigma'_w.$$

$t = 2$ (определили ранее).

Так как по условию задачи выборка бесповторная и оценивается генеральная доля, то среднюю квадратическую ошибку выборки σ'_w найдем по следующей формуле:

$$\sigma'_w = \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} = \left[\begin{array}{c} \text{по условию задачи} \\ N \rightarrow \infty \end{array} \right] \approx \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} = \sqrt{\frac{0,1(1-0,1)}{100}} = 0,03.$$

Тогда $\delta = t \cdot \sigma'_w = 2 \cdot 0,03 = 0,06$.

Искомые пределы:

$$w - \delta \leq p \leq w + \delta,$$

$$0,1 - 0,06 \leq p \leq 0,1 + 0,06,$$

$0,04 \leq p \leq 0,16$, т.е. с вероятностью 0,954 можно утверждать, что доля угля с зольностью более 20% изменяется от 0,04 до 0,16 (или составляет от 4% до 16%)